

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng:

- a) Tích ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 6
- b) Tích bốn số nguyên liên tiếp chia hết cho 24
- c) Tích năm số nguyên liên tiếp chia hết cho 120
- d) Tích sáu số nguyên liên tiếp chia hết cho 720.

Bài 2. Chứng minh rằng:

- a) Tích ba số chẵn liên tiếp chia hết cho 48
- b) Tích bốn số chẵn liên tiếp chia hết cho 384
- c) Tích năm số chẵn liên tiếp chia hết cho 3840.

Bài 3. Cho $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng:

- a) n^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1
- b) n^2 chia cho 4 dư 0 hoặc 1
- c) n^2 chia cho 5 dư 0 hoặc 1 hoặc 4
- d) n^2 chia cho 7 dư 0 hoặc 1 hoặc 2 hoặc 4.

Bài 4. Cho $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng:

- a) n^3 chia cho 9 dư 0 hoặc 1 hoặc 8
- b) n^4 chia cho 16 dư 0 hoặc 1.

Bài 5. Cho $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng:

- a) $n^3 - n$ chia hết cho 6
- b) $n^3 + 59n$ chia hết cho 6
- c) $n^2(n^2 - 1)$ chia hết cho 12
- d) $(n^2 + 3n + 1)^2 - 1$ chia hết cho 24
- e) $n^5 - n$ chia hết cho 30
- f) $n^5 - 5n^3 + 4n$ chia hết cho 120.

Bài 6. Chứng minh rằng:

- a) $n^3 + 3n^2 - n - 3 : 48$ với n lẻ
- b) $n^8 - n^6 - n^4 + n^2 : 1152$ với n lẻ
- c) $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n : 384$ với n chẵn.

Bài 7. Chứng minh rằng tích của ba số nguyên liên tiếp, trong đó số ở giữa là lập phương của một số tự nhiên, chia hết cho 504.

Bài 8. Cho $x, y \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng:

- a) $x^3y - xy^3 : 6$
- b) $x^5y - xy^5 : 30$
- c) $xy : 9$ nếu $x^2 + y^2 : 3$

Bài 9. Cho $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

- a) $52^n + 33 : 17$
- b) $5 \cdot 24^n + 18 : 23$
- c) $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n : 19$
- d) $3^{n+2} + 4^{2n+1} : 13$
- e) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n : 11$
- f) $2 \cdot 52^n - 18^n - 35^n : 17$

Bài 10. Cho $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

- a) $11^{n+2} + 12^{2n+1} : 133$
- b) $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n : 1897$

Bài 11. Chứng minh rằng:

- a) $46^n + 296 \cdot 13^n : 1947$ với $n \in \mathbb{N}$, n lẻ

b) $20^n + 16^n - 3^n - 1 : 323$ với $n \in \mathbb{N}$, n chẵn.

Bài 12. Cho $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng: $3^{2^{4n+1}} + 2 : 11$

Bài 13. Chứng minh rằng:

a) $3^{100} + 4^{100} : 13$

b) $3^{2003} - 9 : 13$

c) $2222^{5555} + 5555^{2222} : 7$

Bài 14. Tìm số dư trong phép chia:

a) $5^{70} + 7^{50}$ cho 12

b) $3^8 + 3^6 + 3^{2004}$ cho 91.

Bài 15. Cho $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

a) $16^n - 15n - 1 : 225$

b) $3^{3n+3} - 26n - 27 : 169$

c) $4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36 : 64$.

Bài 16. Chứng minh rằng với số nguyên $n > 1$ ta có: $n^n + 5n^2 - 1$ chia hết cho $(n-1)^2$.

Bài 17. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ số $2^{3^n} + 1$ chia hết cho 3^n .

Bài 18. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{Z}$ thì:

a) $n^2 - 5n - 49 \not\vdots 169$

b) $n^2 + 3n + 5 \not\vdots 121$.

Bài 19. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{Z}$ thì:

a) $9n^3 + 9n^2 + 3n - 16 \not\vdots 343$

b) $4n^3 - 6n^2 + 3n + 37 \not\vdots 125$.

Bài 20. Tổng $z = 3^n + 63$ (với $n \in \mathbb{N}^*$; n chẵn) có chia hết cho 72 không ?

Bài 21. Cho $n > 3$ ($n \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ ($0 < b < 9$) thì $ab : 6$.

Bài 22. Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số nguyên thoả mãn:

$$(100x + 10y + z) : 21 \text{ thì } (x - 2y + 4z) : 21.$$

Bài 23. Chứng minh rằng nếu $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $a^3 + b^3 + c^3 : 9$ thì ít nhất một trong các số a, b, c phải chia hết cho 3.

Bài 24. Chứng minh rằng mọi số lẻ không chia hết cho 5 đều là ước của một số được viết bởi toàn chữ số một trong hệ thập phân.

Bài 25. Tồn tại hay không số có dạng: 1995 1995 1995 ... 1995 000...000 chia hết cho 1994.

Bài 26. Tìm số nhỏ nhất gồm toàn chữ số 1 chia hết cho số: 333...333 (100 chữ số 3)

Bài 27. Chứng minh rằng $P(n) = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ chia hết cho 5 khi và chỉ khi n không chia hết cho 4.

Bài 28. Chứng minh rằng tồn tại vô số tự nhiên n để $4n^2 + 1$ chia hết cho 5 khi và chỉ khi n không chia hết cho 13.

Bài 29.

a) Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^n - 1$ chia hết cho 7

b) Chứng minh rằng $2^n + 1$ không chia hết cho 7, $n \in \mathbb{N}$.

Bài 30. Tìm n lớn nhất $n \in \mathbb{N}$ sao cho $1995!$ chia hết cho 5^n .

Bài 31. Tìm chữ số tận cùng của số:

a) 9^{9^9}

b) 2^{3^4}

c) $14^{14^{14}}$

Bài 32. Tìm hai chữ số tận cùng của $14^{14^{14}}$.

Bài 33. Tìm hai chữ số tận cùng của số:

a) 2^{999}

b) 3^{999} .

Bài 34. Chứng minh rằng nếu n là số nguyên tố cùng nhau với 10 thì n^{101} và n sẽ có ba chữ số tận cùng giống nhau.

Bài 35. Tìm tám chữ số tận cùng của 5^{1995} .

Bài 36. Tìm sáu chữ số tận cùng của 5^{21} .

Bài 37. Tìm 1000 chữ số tận cùng của tổng:

$$A = 1 + 50 + 50^2 + \dots + 50^{999}.$$

Bài 38. Cho $x, y, z \in \mathbb{Z}$ thoả mãn $x^2 + y^2 = 2z^2$. Chứng minh rằng: $x^2 - y^2 : 48$.

Bài 39. Tìm các số nguyên dương có hai chữ số, biết số đó là bội của tích hai chữ số của chính số đó.

Bài 40. Cho $x, y, z \in \mathbb{Z}$ thoả mãn $x^2 + y^2 = z^2$. Chứng minh rằng $xyz : 60$.

Bài 41. Chứng minh rằng từ 52 số nguyên bất kỳ ta luôn có thể chọn ra hai số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

Bài 42. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho thoả tất cả các điều kiện sau:

a) $n : 7$

b) $n - 35 : 100$

c) Tổng các chữ số của n bằng 35.

Bài 43. Cho n là số nguyên dương, $n \geq 2$ và số nguyên dương a thoả $a^2 \equiv 1 \pmod{2^n}$. Tìm số dư khi chia a cho 2^{n-1} .

Bài 44. Cho $a = 2 + \sqrt{3}$.

a) Tính $[a^3]$.

b) Chứng minh rằng $[a^n]$ là số tự nhiên lẻ với mọi n nguyên dương.

Bài 45. Chứng minh rằng khi viết số $x = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{200}$ dưới dạng thập phân, ta được chữ số liền trước dấu phẩy là 1, chữ số liền sau dấu phẩy là 9.

Bài 46. Chứng minh rằng với mọi số hữu tỉ x đều tồn tại số nguyên m duy nhất sao cho:

$$m \leq x < m + 1.$$

Số nguyên m gọi là phần nguyên của x và ký hiệu $m = [x]$.

Bài 47. Tìm phần nguyên $[x]$ của x , biết

a) $x = \frac{17}{5}$

b) $x = \frac{-35}{4}$

c) $\frac{12}{5} < x < \frac{43}{17}$

d) $\frac{-14}{3} < x < \frac{-21}{5}$.

Bài 48. Cho $x \in \mathbb{Q}, x > 0, m \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng số các số tự nhiên khác 0 không vượt quá x mà là bội của m bằng $\left[\frac{x}{m} \right]$.

Bài 49. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho: $(x + 5)(y + 6) = 3xy$.

Bài 50. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $y^3 - x^3 = 91$.

Bài 51. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

Bài 52. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + x + 1991 = y^2$.

Bài 53. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình:

a) $xy + 2x + 3y = 27$

b) $3x^2 + 10xy + 8y^2 = 96$.

Bài 54. Giải các phương trình nghiệm nguyên dương sau:

a) $2^x + 2^y + 2^z = 2336, (x < y < z)$

b) $y^2 - 12^2 = 2^x + 3^2$.

Bài 55. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a) $xy = p(x + y)$ (p là số nguyên tố cho trước)

b) $3^x + 171 = y^2$.

Bài 56. Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $5x^2 - 4xy + y^2 = 169$.

Bài 57. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $4x^2 + 4x + y^2 = 24$.

Bài 58. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^2 - 8xy + 17y^2 = 169$.

Bài 59. Tìm các nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$17(xyzt + xy + xt + zt + 1) = 54(yzt + y + t).$$

Bài 60. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $xy^2 + 2xy + x - 216y = 0$.

Bài 61. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a) $19x^2 + 28y^2 = 729$

b) $7x^2 + 13y^2 = 1820$

c) $8x^3 = 3^y + 997$.

Bài 62. Giải các phương trình nghiệm nguyên dương sau:

a) $7^z = 2^x \cdot 3^y - 1$

b) $2^x = 1 + 3^y \cdot 7^z$

c) $x^3 + y^6 + 27^z = 1996^2$.

Bài 63. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 30419751951995.$$

Bài 64. Giải phương trình trong tập hợp các số nguyên:

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4 = 1999.$$

Bài 65. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình sau:

a) $x + y + z = xyz$

b) $2^x + 2^y + 2^z = 2^t$.

Bài 66. Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$

b) $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$

c) $1 + x^2 + x^3 + x^4 = y^4$.

Bài 67. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $1! + 2! + \dots + x! = y^2$.

Bài 68. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $1! + 2! + \dots + x! = y^3$.

Bài 69. Giải các phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^2 = y(y + 1)(y + 2)(y + 3)$

b) $3(x^2 + xy + y^2) = x + 8y$.

Bài 70. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $2^x + 1 = 3^y$.

Bài 71. Giải các phương trình nghiệm nguyên:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980}$ và $x < y$.

Bài 72. Tìm các số nguyên x, y, z sao cho: $x^2 + y^2 + z^2 = 1980$.

Bài 73.

a) Giải phương trình nghiệm nguyên dương $xy = z^2$

b) Giải phương trình nghiệm nguyên: $8x^4 - 4y^4 + 2z^4 = t^4$.

Bài 74. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^4 + y^4 = 11z^4.$$

Bài 75. Phương trình $x^2 + y^3 = z^4$ có nghiệm là các số nguyên tố x, y, z được không ?

Bài 76. Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 30^n \text{ đều có nghiệm nguyên.}$$

Bài 77. Giải phương trình sau với $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x} + \dots + \sqrt[n]{x}}_m = y, (m, n \in \mathbb{N}; m \geq 2; n \geq 2).$$

Bài 78. Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1995}$ chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên dương.

Bài 79. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ 2(x + y + z) = xy \end{cases}$$

Bài 80. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz \\ x^2 = 2(y + z) \end{cases}$$

Bài 81. Giải hệ phương trình nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} x^2 - y^3 = 11 \\ z^2 = 2y^2 + 1 \end{cases}$$

Bài 82. Giải hệ phương trình nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} xy - x! + y = 1 \\ yz - y! + z = 1 \\ x^2 - 2y^2 + 2x - 4y = 2 \end{cases}$$

Bài 83. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình:

$$\begin{cases} z + y = x + 10 \\ yz = 10x + 1 \end{cases}$$

Bài 84. Tìm các số nguyên x, y, z sao cho:

$$\begin{cases} xyz = 1989 \\ x + y - z = 89 \end{cases}$$

Bài 85. Giải hệ phương trình nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

Bài 86. Giải hệ phương trình nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} & (1) \\ y^{x+y} = x^3 & (2) \end{cases}$$

Bài 87. Tìm các số nguyên x, y, z thoả mãn:

$$\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x \end{cases}$$

Bài 88. Tìm các số nguyên a, b, c sao cho hệ phương trình ẩn x sau có nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 & (1) \\ bx^2 + cx + a = 26 & (2) \\ cx^2 + ax + b = -26 & (3) \end{cases}$$